Lineare Funktion

1 Einleitung

Sie arbeiten für einen Pay-TV-Sender. Dieser überdenkt aktuell seine Preisgestaltung. In der Vergangenheit verlangte der Sender für das Spartenprogramm „Sport plus“ 20 Euro pro Monat. Das Angebot wurde dabei durchschnittlich von 1.750.000 (1,75 mio) Abonnenten wahrgenommen. Intensive Marktforschung hat ergeben, dass selbst bei der Gestaltung als kostenfreies Angebot (Free TV) höchstens 3.500.000 (3,5 mio) Haushalte an „Sport plus“ interessiert sind.

Wie lautet die Preis-Absatz-Funktion, wenn der Sender von einem linearen Zusammenhang ausgeht?

Theoretische Einführung

Bevor wir die Aufgabe final lösen, soll an dieser Stelle noch ein kurzer Einstieg in die Theorie der linearen Funktion erfolgen.

Eine Funktion ist eine eindeutige Zuordnung von Argumenten x zu Funktionswerten y.

Der Graph einer linearen Funktion ist immer eine Gerade.

Eine lineare Funktion stellt sich im Allgemeinen folgendermaßen dar:

$$\text{f(x)} = y = m \cdot x + n$$

Dabei gilt, dass x (Argument) eine unabhängige und y (Funktionswert) eine abhängige Variable ist. m und n sind die Parameter der Funktion. Der Parameter m gibt hierbei den Anstieg der Geraden an, sprich um wie viel sich y erhöht/erniedrigt, wenn man x um 1 erhöht; der Parameter n gibt die Verschiebung vom Koordinatenursprung in y-Richtung an, also den Schnitt an der y-Achse.

Es ist zu beachten, dass aufgrund der Eindeutigkeit einer (linearen) Funktion, diese Funktionsgerade nie parallel zur y-Achse verläuft, da hierbei einem x-Wert mehrere y-Werte zugeordnet werden (uneindeutig).

Lösungsansatz

Ist nach einer linearen Funktionsgleichung gefragt, so sind immer die Parameter m (Anstieg) und n (Verschiebungskonstante) gesucht.

Um die Preis-Absatz-Funktion für diesen Sachverhalt zu ermitteln, müssen m (Anstieg) und n (Verschiebungskonstante) bestimmt werden.

Den Anstieg ermitteln wir in folgenden drei Schritten:

Schritt 1: Ermitteln des linearen Gleichungssystems

$$\text{f(x)} = y = m \cdot x + n$$

y (Preis) und x (Abonnenten) entnehmen wir der Aufgabenstellung und setzten sie ein.

$$\begin{aligned} \textbf{I} \quad & \mathrm{f(x)} = 0 = m \cdot 3{,}5\text{mio} + n \\ \textbf{II} \quad & \mathrm{f(x)} = 20 = m \cdot 1{,}75\text{mio} + n \end{aligned}$$

Schritt 2: II minus I

$$20 - 0 = m \cdot 1{,}75\text{mio} - m \cdot 3{,}5\text{mio} + n - n$$

Hinweis: Die beiden Verschiebungskonstanten n kompensieren sich an dieser Stelle gegenseitig.

$$\to 20 = m \cdot 1{,}75\text{mio} - m \cdot 3{,}5\text{mio}$$

Schritt 3: Nach m umstellen

$$20 = m \cdot 1{,}75\text{mio} - m \cdot 3{,}5\text{mio}$$

Operation: m ausklammern

$$\begin{aligned} 20 &= m \cdot (1{,}75\text{mio} - 3{,}5\text{mio}) \\ 20 &= m \cdot (-1{,}75\text{mio}) \end{aligned}$$

Operation: geteilt durch (-1,75 mio)

$$\frac{20}{-1{,}75\text{mio}} = m$$

$$m = \underline{\underline{-\frac{20}{1{,}75\text{mio}} = -\frac{20}{1750000}}}$$

Da wir nun den Anstieg m der Preis-Absatz-Funktion kennen, ist es uns möglich, die Verschiebungskonstante n zu bestimmen. Um n zu bestimmen, setzen wir m in eine Gleichung (I oder II) ein.

Schritt 1: Einsetzen der bekannten Größe m in Gleichung I

$$0 = -\frac{20}{1750000} \cdot 3500000 + n$$

Schritt 2: Nach n umstellen

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{20}{1750000} \cdot 3500000 + n && \\ 0 &= -40 + n && \mid +40 \\ 40 &= n && \mid \text{also} \\ n &= \underline{\underline{40}} && \end{aligned}$$

Nun sind uns die Parameter m und n bekannt, die Preis-Ansatz-Funktion lautet:

$$\mathrm{f(x)} = y = -\frac{20}{1750000} \cdot x + 40$$

2 Übungsaufgaben

1.) Ihr Chef möchte von Ihnen wissen, mit wie vielen Abonnenten zu rechnen ist, wenn der Preis für Sport-Plus bei monatlich 12 Euro liegt.

$$\text{f(x)} = y = -\frac{20}{1750000} \cdot x + 40$$

Schritt 1: Einsetzen der bekannten Größen

$$12 = -\frac{20}{1750000} \cdot x + 40$$

Schritt 2: Umstellen nach x

$$\begin{aligned} 12 &= -\frac{20}{1750000} \cdot x + 40 && | - 40 \\ -28 &= -\frac{20}{1750000} \cdot x && | : (-\frac{20}{1750000}) \\ 2450000 &= x && | \text{ also} \\ x &= \underline{\underline{2450000}} \end{aligned}$$

Interpretation: Bei einem monatlichen Preis von 12 Euro würden 2450000 Haushalte Sport-Plus nachfragen.

2.) Rudi Ratlos ist Eisverkäufer und möchte gerne wissen, wie stark seine Kunden auf Preisveränderungen reagieren. An Tagen, an denen Rudi Ratlos einen Eisbecher für 7 Euro verkauft, kommen 50 Kunden. Reduziert er den Preis pro Eisbecher um 2 Euro, konsumieren 130 Kunden sein Eis. Ermitteln Sie algebraisch den Anstieg der Preis-Absatz-Funktion.

Schritt 1: Ermitteln des linearen Gleichungssystems

$$\text{f(x)} = y = m \cdot x + n$$

$$\begin{aligned} &\textbf{I} \quad 5 = m \cdot 130 + n \\ &\textbf{II} \quad 7 = m \cdot 50 + n \end{aligned}$$

Schritt 2: II minus I

$$7 - 5 = m \cdot 50 - m \cdot 130 + n - n$$

Schritt 3: Nach m umstellen

$$\begin{aligned} 2 &= m \cdot 50 - m \cdot 130 && | \text{ ausklammern} \\ 2 &= m \cdot (50 - 130) \\ 2 &= m \cdot (-80) && | : (-80) \\ -\frac{1}{40} &= m && | \text{ also} \\ m &= \underline{\underline{-\frac{1}{40}}} \end{aligned}$$

Interpretation: Da wir von einer linearen Funktion ausgehen, gewinnt Rudi Ratlos bei einer Reduktion des Eisbecherpreises um einen Euro, 40 Kunden pro Tag dazu.

3.) Hartmut Sturmwind ist Autoverkäufer und hat sich darauf spezialisiert, die neue A-Klasse von Mercedes zu verkaufen.

In einigen Quartalen verkauft er die Neufahrzeuge zum Preis von 35.000 Euro. Im Schnitt findet er dann 200 Abnehmer für seine Autos. Bei einem Preis von 30.000 Euro sind es sogar 500 Kunden.

Hartmund Sturmwind möchte, dass Sie für ihn den Anstieg der Preis-Absatz-Funktion bestimmen.

Schritt 1:Aufstellen der linearen Funktionen

$$\text{f(x)} = y = m \cdot x + n$$

$$\begin{array}{rl} \textbf{I} & 30000 = m \cdot 500 + n \\ \textbf{II} & 35000 = m \cdot 200 + n \end{array}$$

Schritt 2: II minus I

$$35000 - 30000 = m \cdot 200 - m \cdot 500 + n - n$$

Schritt 3: Nach m umstellen

$$\begin{aligned} 5000 &= m \cdot 200 - m \cdot 500 && \mid \text{ausklammern} \\ 5000 &= m \cdot (200 - 500) \\ 5000 &= m \cdot (-300) && \mid : (-300) \\ -\frac{5000}{300} &= m && \mid \text{also} \\ m &= -\frac{5000}{300} \\ m &= \underline{\underline{-\frac{50}{3}}} \end{aligned}$$

Interpretation: Da wir von einer linearen Funktion ausgehen, gewinnt Hartmut Sturmwind pro 50 reduzierten Euro 3 Kunden pro Quartal.