Der Gaußsche Algorithmus

Der Gaußsche Algorithmus beinhaltet das Vertauschen der Zeilen der erweiterten Koeffizientenmatrix $(A, \boldsymbol{b})$ und das Additionsverfahren. Ziel ist es, möglichst viele Nullen unterhalb der Diagonalen zu schaffen, um die Lösung schnell und einfach ablesen zu können.

1 Fall: Zeilenanzahl = Variablenanzahl im Gleichungssystem

Gegeben:

$$\begin{array}{ll} \textbf{I} & 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 3 \\ \textbf{II} & x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 = -3 \\ \textbf{III} & -x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ \textbf{IV} & 5x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 12 \end{array}$$

Gesucht: Lösung für x_1, x_2, x_3 und x_4

Oft ist es sinnvoll, um nachfolgende Rechenschritte zu vereinfachen, in die erste Zeile der Matrix eine Zeile zu stellen die mit einer 1 beginnt. Man darf Zeilen tauschen, es ändert nichts am Gleichungssystem, wenn zum Beispiel Zeile III mit Zeile II getauscht wird.

$$(A, \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 4 & -3 \\ -1 & 3 & -1 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 1 & -3 & 12 \end{array}\right)$$

Wir tauschen also 1. und 2. Zeile.

$\downarrow$ Tausche Zeile I mit II

$$(A, \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -2 & 4 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & -1 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 1 & -3 & 12 \end{array}\right)$$

Jetzt wird Zeile I' immer vervielfacht und von den anderen Zeilen abgezogen bzw. hinzuaddiert, bis die erste Spalte von Zeile II bis IV mit Nullen aufgefüllt ist.

$\downarrow$ Summe des -2-fachen der 1. und der 3. Zeile ($\mathbf{II}' = -2 \cdot \mathbf{I}' + \mathbf{II}'$)

$$(A,\boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & 5 & -10 & 9 \\ -1 & 3 & -1 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 1 & -3 & 12 \end{array}\right)$$

$\downarrow$ Summe der 1. und der 2. Zeile ($\mathbf{III}' = \mathbf{I} + \mathbf{III}$)

$$(A,\boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & 5 & -10 & 9 \\ 0 & 4 & -3 & 5 & -1 \\ 5 & 2 & 1 & -3 & 12 \end{array}\right)$$

$\downarrow$ Summe des -5-fachen der 1. und der 4. Zeile ($\mathbf{IV}' = -5 \cdot \mathbf{I} + \mathbf{IV}'$)

$$(A,\boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & 5 & -10 & 9 \\ 0 & 4 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & -3 & 11 & -23 & 27 \end{array}\right)$$

Geschafft, die erste Spalte hat die gewünschte Form! Jetzt gehen wir dazu über, das gleiche Verfahren auf Spalte 2 anzuwenden und lassen dabei Zeile I unberührt, da sie schon die gewünschte Form hat. Zeile II ist nun die Zeile, mit der multipliziert wird. Ziel ist es, Zeile III' und IV' in Spalte 2 mit einer Null zu füllen.

$\downarrow$ Summe des -4-fachen der 2. und des 3-fachen der 3. Zeile ($\mathbf{III}'' = -4 \cdot \mathbf{II}' + 3 \cdot \mathbf{III}'$)

$$(A,\boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & 5 & -10 & 9 \\ 0 & 0 & 11 & -25 & 33 \\ 0 & -3 & 11 & -23 & 27 \end{array}\right)$$

$\downarrow$ Differenz der 4. und der 2. Zeile ($\mathbf{IV}'' = \mathbf{IV}' - \mathbf{II}'$)

$$(A,\boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & 5 & -10 & 9 \\ 0 & 0 & 11 & -25 & 33 \\ 0 & 0 & 6 & -13 & 18 \end{array}\right)$$

Wieder eine Spalte in der gewünschten Form! Es fehlt nur noch Spalte 3. Dazu muss in Zeile IV" in Spalte 3 noch eine Null erzeugt werden.

$\downarrow$ Summe der -6-fachen der 3. Zeile und des 11-fachen der 4. Zeile ($\mathbf{IV}''' = -6 \cdot \mathbf{III}'' + 11 \cdot \mathbf{IV}''$)

$$(A,\boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & 5 & -10 & 9 \\ 0 & 0 & 11 & -25 & 33 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \end{array}\right)$$

Fertig, eine „perfekte“ Dreiecksmatix wurde geschaffen!

Jetzt kann man von unten nach oben die Lösung ablesen:

$$\begin{aligned}
7x_4 &= 0 &&\rightarrow && && x_4 = 0\\
11x_3 - 25x_4 &= 33 &&\rightarrow & 11x_3 - 25\cdot 0 &= 33 &&\rightarrow x_3 = 3\\
-3x_2 + 5x_3 - 10x_4 &= 9 &&\rightarrow & -3x_2 + 5\cdot 3 - 10\cdot 0 &= 9 &&\rightarrow x_2 = 2\\
x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 &= -3 &&\rightarrow & x_1 + 2 - 2\cdot 3 + 4\cdot 0 &= -3 &&\rightarrow x_1 = 1
\end{aligned}$$

2 Fall: Zeilenanzahl > Variablenanzahl im Gleichungssystem

Hier erwartet man ein überbestimmtes Gleichungssystem ($n < m$). Der Gauß-Algorithmus wird diese Überbestimmtheit auflösen und entweder zu keiner oder genau einer Lösung führen. Aus der Form der Matrix kann am Ende des Algorithmus auf die Anzahl der Lösungen geschlossen werden.

Gegeben:

$$\begin{array}{ll}
\textbf{I} & 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 3\\
\textbf{II} & x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 = -3\\
\textbf{III} & -x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 2\\
\textbf{IV} & 5x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 12\\
\textbf{V} & 10x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 6x_4 = 24
\end{array}$$

Gesucht: Lösung für x_1, x_2, x_3 und x_4

Die Gleichungen **I** bis **IV** sind wie oben. Mit den gleichen Schritten wie oben ergibt sich dann die folgende Matrix:

$$(A, \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{rrrr|r}
1 & 1 & -2 & 4 & -3\\
0 & -3 & 5 & -10 & 9\\
0 & 0 & 11 & -25 & 33\\
0 & 0 & 0 & 7 & 0\\
10 & 4 & 2 & -6 & 24
\end{array}\right)$$

$\downarrow$ Differenz der 5. und des 10-fachen der 1. Zeile ($\mathbf{V}' = \mathbf{V} - 10 \cdot \mathbf{I}$)

$$(A, \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{rrrr|r}
1 & 1 & -2 & 4 & -3\\
0 & -3 & 5 & -10 & 9\\
0 & 0 & 11 & -25 & 33\\
0 & 0 & 0 & 7 & 0\\
0 & -6 & 22 & -46 & 54
\end{array}\right)$$

$\downarrow$ Differenz des 3-fachen der 5. und des 6-fachen der 2. Zeile ($\mathbf{V}' = 3 \cdot \mathbf{V} - 6 \cdot \mathbf{II}$)

$$(A, \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{rrrr|r}
1 & 1 & -2 & 4 & -3\\
0 & -3 & 5 & -10 & 9\\
0 & 0 & 11 & -25 & 33\\
0 & 0 & 0 & 7 & 0\\
0 & 0 & 36 & -78 & 108
\end{array}\right)$$

↓ Differenz des 11-fachen der 5. und des 36-fachen der 3. Zeile ($\mathbf{V}' = 11 \cdot \mathbf{V} - 36 \cdot \mathbf{III}$)

$$(A, \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & 5 & -10 & 9 \\ 0 & 0 & 11 & -25 & 33 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 42 & 0 \end{array}\right)$$

↓ Differenz der 5. und des 6-fachen der 4. Zeile ($\mathbf{V}' = \mathbf{V} - 6 \cdot \mathbf{IV}$)

$$(A, \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & 5 & -10 & 9 \\ 0 & 0 & 11 & -25 & 33 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Nun kann man die Lösung analog zum obigen Beispiel ablesen, da hier eine Nullzeile entsteht.

Und wir sehen, dass das vermeintlich überbestimmte Gleichungssystem aufgrund einer linearen Abhängigkeit zwischen Zeile IV und V gar nicht überbestimmt ist.

3 Fall: Zeilenanzahl < Variablenanzahl im Gleichungssystem

Auf den ersten Blick sieht es nach einem unterbestimmten Gleichungssystem aus. Das bedeutet, man erwartet eine Parameter-Lösung. Möglich ist aber auch, dass keine Lösung gefunden wird.

Gegeben:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcr} \mathbf{I} & 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & = & 3 \\ \mathbf{II} & x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & 4x_4 & = & -3 \\ \mathbf{III} & -x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 2 \end{array}$$

Gesucht: Lösung für x_1, x_2, x_3 und x_4

Es handelt sich hierbei um die Gleichungen **I** bis **III** von oben. Umformungen wie dort führen zu folgender Matrix:

$$(A, \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & 5 & -10 & 9 \\ 0 & 0 & 11 & -25 & 33 \end{array}\right)$$

In der letzten Zeile ist es nicht möglich, einen konkreten Wert anzugeben. Also wählt man für die letzte Variable einen Parameter, etwa t, und erhält die folgende Lösung:

$$\begin{array}{rcl} & & x_4 = t \\ 11x_3 - 25x_4 = 33 & \rightarrow & 11x_3 - 25 \cdot t = 33 \rightarrow x_3 = 3 + \frac{25}{11}t \\ -3x_2 + 5x_3 - 10x_4 = 9 & \rightarrow & -3x_2 + 5 \cdot (3 + \frac{25}{11}t) - 10 \cdot t = 9 \rightarrow x_2 = 2 + \frac{5}{11}t \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 = -3 & \rightarrow & x_1 + (2 + \frac{5}{11}t) - 2 \cdot (3 + \frac{25}{11}t) + 4 \cdot t = -3 \rightarrow x_1 = 1 + \frac{1}{11}t \end{array}$$

4 Beeinflussung der Anzahl der Lösungen

Der Vollständigkeit halber sei gesagt, dass bei einem Gleichungssystem aus der Anzahl der Zeilen und Variablen nicht zwingend auf die Anzahl der Lösungen geschlossen werden kann.

4.1 Annahme einer nicht linear unabhängigen Zeile

Als Beispiel nehmen wir die erste zuvor gelöste Matrix noch einmal und ändern die vierte Zeile:

$$(A, \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 4 & -3 \\ -1 & 3 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 2 & -6 & 6 \end{array}\right)$$

Es ist die gleiche Anzahl an Zeilen und Variablen, aber nun kann man leicht erkennen, das Zeile IV das Doppelte von Zeile I ist. Sie ist linear abhängig. Addiert man das -2-fache der 1. mit der 4. Zeile, erhält man eine Nullzeile:

$$(A, \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 4 & -3 \\ -1 & 3 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Löst man wie oben bereits erwähnt, erhalt man:

$$(A, \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{lrrr|r} 1 & 1 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & 5 & -10 & 9 \\ 0 & 0 & 11 & -25 & 33 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Nun hat man ein unterbestimmtes Gleichungssystem und muss die Lösung in Abhängigkeit von einem Parameter angeben. Es sind faktisch nun unendlich viele Lösungen.

4.2 Annahme einer falschen Aussage

Als ein weiteres Beispiel nehmen wir das folgende Gleichungssystem:

$$(A, \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 4 & -3 \\ -1 & 3 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 2 & -6 & 7 \end{array}\right)$$

Die letzte Zahl der letzten Zeile ist geändert und hat eine entscheidende Auswirkung auf die Lösbarkeit. Arbeitet man den Gaußschen Algorithmus ab, erhält man:

$$(A, \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & 5 & -10 & 9 \\ 0 & 0 & 11 & -25 & 33 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Die letzte Zeile enthält nun die Gleichung:

$0 \cdot x_4 = 1$

Das ist eine falsche Aussage und das Gleichungssystem hat keine Lösung.

4.3 Aussagekraft der Dreiecksmatrix identifizieren

Nach dem Durchführen des Gaußschen Algorithmus erkennt man an der Stufenform, ob das Gleichungssystem keine, eine oder unendlich viele Lösungen hat.

Dreiecksmatrix meint, dass pro Zeile eine Variable weniger vorhanden ist, von der ersten zur letzten Zeile, also dass keine großen Stufen in der Diagonalen sind.

Diese Matrixbeispiele sollen beim Identifizieren der Lösungsanzahl helfen:
letzte Zeile keine Variable und letzte Spalte $\neq 0 \Rightarrow$ keine Lösung!

$$(A, \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Dreiecksmatrix mit einer Variablen in letzter Zeile $\Rightarrow$ eine Lösung!

$$(A, \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Dreiecksmatrix mit zwei Variablen in letzter Zeile $\Rightarrow$ Parameter-Lösung!

$$(A, \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

große horizontale Stufe $\Rightarrow$ Parameter-Lösung!

$$(A, \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

große vertikale Stufe (falsche Aussage) $\Rightarrow$ keine Lösung!

$$(A, \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Nullzeilen haben keinen Einfluss auf die Lösbarkeit, da sie linear abhängig von den anderen Zeilen sind!

$$(A, \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Kommt es zu einer Mischung dieser Formen, ist klar, dass durch eine falsche Aussage weder eine eindeutige noch eine Parameter-Lösung mehr zustande kommen kann.