Cramersche Regel

Je mehr Gleichungen und Variablen man hat, desto schwerer wird es, eine Lösung zu finden. In diesem Fall erstellt man eine Koeffizientenmatrix A erweitert durch den Lösungsvektor $\boldsymbol{b}$. Im Folgenden wird die Lösungsmöglichkeit mittels der Cramerschen Regel vorgestellt.

Die Cramersche Regel ist anwendbar auf quadratische Matrizen ($n = m$), wobei die Gleichungen linear unabhängig sind. Die Variablen $x_1, \ldots, x_n$ lassen sich durch folgende Gleichungen bestimmen. Dabei wird die i-te Spalte durch den Lösungsvektor $\boldsymbol{b}$ ersetzt.

$$x_i = \frac{\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}$$

Dabei bezeichnet det die **Determinante** einer Matrix. Um die Cramersche Regel anwenden zu können, benötigt man die Vorgehensweise der Determinantenberechnung einer quadratischen Matrix.

Für $n = 2$ gilt:

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

Für $n = 3$ gilt:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{31} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

Dabei wird für die Matrizen auf der rechten Seite jeweils die Zeile und Spalte gestrichen, in der der vorgezogene Koeffizient steht.

Oder man wendet die Regel von Sarrus an:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} &= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} \\ &\quad - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} \end{aligned}$$

Dabei erhält man die einzelnen Summanden, indem man die ersten beiden Spalten der Matrix wiederholt und dann entlang der Diagonalen multipliziert. Für die positiven Summanden von oben links nach unten rechts:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right)$$

Und für die negativen Summanden von oben rechts nach unten links:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right)$$

Für $n > 3$ ist die Cramersche Regel sehr aufwendig und unökonomisch und daher nicht empfehlenswert.

Beispiel

Gegeben:

$$\begin{array}{ll} \textbf{I} & 4x_1 - 5x_2 + x_3 = -13 \\ \textbf{II} & \phantom{4x_1 - {}} 2x_2 - x_3 = 10 \\ \textbf{III} & 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 11 \end{array}$$

Gesucht: Lösung für x_1, x_2 und x_3

1. Matrix A und Vektor $\boldsymbol{b}$ ablesen:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -13 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix}$$

2. Determinante von A bestimmen:

$$\begin{aligned} \det A &= \det \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= 4 \cdot 2 \cdot 3 + 5 \cdot (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 0 \cdot (-1) - 1 \cdot 2 \cdot 2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1) - 5 \cdot 0 \cdot 3 \\ &= 6 \end{aligned}$$

3. Die x_i bestimmen:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\det \begin{pmatrix} -13 & 5 & 1 \\ 10 & 2 & -1 \\ 11 & -1 & 3 \end{pmatrix}}{\det A} \\ &= \frac{(-13) \cdot 2 \cdot 3 + 5 \cdot (-1) \cdot 11 + 1 \cdot 10 \cdot (-1) - 1 \cdot 2 \cdot 11 - (-13) \cdot (-1) \cdot (-1) - 5 \cdot 10 \cdot 3}{6} \\ &= -\frac{276}{6} = -46 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x_2 &= \frac{\det \begin{pmatrix} 4 & -13 & 1 \\ 0 & 10 & -1 \\ 2 & 11 & 3 \end{pmatrix}}{\det A} \\
&= \frac{4 \cdot 10 \cdot 3 + (-13) \cdot (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 0 \cdot 11 - 1 \cdot 10 \cdot 2 - (-13) \cdot 0 \cdot 3 - 4 \cdot (-1) \cdot 11}{6} \\
&= \frac{170}{6} = \frac{85}{3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_3 &= \frac{\det \begin{pmatrix} 4 & 5 & -13 \\ 0 & 2 & 10 \\ 2 & -1 & 11 \end{pmatrix}}{\det A} \\
&= \frac{4 \cdot 2 \cdot 11 + 5 \cdot 10 \cdot 2 + (-13) \cdot 0 \cdot (-1) - (-13) \cdot 2 \cdot 2 - 10 \cdot (-1) \cdot 4 - 5 \cdot 0 \cdot 11}{6} \\
&= \frac{280}{6} = \frac{140}{3}
\end{aligned}
$$