Varianz und Standardabweichung

1 Motivation

Die Varianz ist ein Maß für die Abweichung einer Zufallsvariablen X von ihrem Erwartungswert $E[X]$. Sie misst die Streuung der Werte relativ zum Erwartungswert.

Die Standardabweichung ergibt sich exakt aus der Quadratwurzel der Varianz und ist ebenso ein Streuungsmaß, welches die Schwankungen der Werte relativ zum Erwartungswert beschreibt. Die Standardabweichung wird in der Finanzwirtschaft auch Volatilität genannt. Beide Maße, Volatilität und Varianz, sind Risikomaße. Mit ihnen kann man z. B. das Risiko eines Wertpapiers angeben.

2 Varianz und Standardabweichung

2.1 Die Aufgabenstellung

Die folgende Aufgabe dient zur Veranschaulichung:

Sandra Sonnenschein möchte einen Teil ihrer Ersparnisse in Wertpapiere investieren. Sie ist allerdings ein sehr risikoscheuer Mensch und bittet Sie aus diesem Grund, das risikoärmste Wertpapier für sie ausfindig zu machen.

2.2 Die Variablen

X = Zufallsvariable

i, j = jeweiliges Wertpapier

s = Zustand$n$ = Anzahl der Zuständeq_s = Wahrscheinlichkeit, mit der der Zustand s eintrifft

$E[r_i]$ bzw. $E[r_j]$ = Erwartungswert der Rendite des Wertpapiers i bzw. j

r_{is} bzw. r_{js} = Rendite des Wertpapiers i bzw. j im Zustand s

2.3 Die Daten

In der Tabelle stehen für drei Wertpapiere exemplarisch die jeweiligen Renditen in Abhängigkeit von dem zukünftigen Zustand.

Zustand s Eintrittswahrscheinlichkeit q_s	$s = 1$ $q_1 = 0{,}60$	$s = 2$ $q_2 = 0{,}40$
WP_1	0,03	0,08
WP_2	0,10	0,00
WP_3	0,04	0,08

2.4 Die Berechnung

Um die Standardabweichung zu ermitteln, bedarf es dreier Schritte:

1. Schritt: Berechnung der Erwartungswerte,
2. Schritt: Berechnung der Varianz,
3. Schritt: Berechnung der Standardabweichung.

1. Schritt: Berechnung der Erwartungswerte

$$
\begin{aligned}
E[\mathrm{WP}_i] &= x_1 \cdot q_1 + x_2 \cdot q_2 + \ldots + x_n \cdot q_n \\
E[\mathrm{WP}_1] &= 0{,}03 \cdot 0{,}60 + 0{,}08 \cdot 0{,}40 &&= 0{,}05 \\
E[\mathrm{WP}_2] &= 0{,}1 \cdot 0{,}60 + 0{,}00 \cdot 0{,}40 &&= 0{,}06 \\
E[\mathrm{WP}_3] &= 0{,}04 \cdot 0{,}60 + 0{,}08 \cdot 0{,}40 &&= 0{,}056
\end{aligned}
$$

2. Schritt: Berechnung der Varianz

Die Berechnung der Varianz erfolgt über die Summierung der Produkte aus den Abweichungsquadraten der einzelnen Werte vom Erwartungswert mit den Eintrittswahrscheinlichkeiten. Sie entspricht also der wahrscheinlichkeitsgewichteten quadrierten Abweichung der Zufallsvariablen von ihrem Erwartungswert.

$$
\begin{aligned}
\sigma^2 &= \sum_{s=1}^{n} (r_{is} - E[r_i])^2 \cdot q_s \\
\sigma^2(WP_1) &= \big(0{,}03 - 0{,}05)^2 \cdot 0{,}60 + (0{,}08 - 0{,}05)^2 \cdot 0{,}40 &&= 0{,}0006 \\
\sigma^2(WP_2) &= \big(0{,}1 - 0{,}06)^2 \cdot 0{,}60 + (0{,}00 - 0{,}06)^2 \cdot 0{,}40 &&= 0{,}0024 \\
\sigma^2(WP_3) &= \big(0{,}04 - 0{,}056)^2 \cdot 0{,}60 + (0{,}08 - 0{,}056)^2 \cdot 0{,}40 &&= 0{,}000384
\end{aligned}
$$

3. Schritt: Berechnung der Standardabweichung

Die Standardabweichung entspricht der Quadratwurzel der Varianz.

$$
\begin{aligned}
\sigma(\mathrm{WP}_i) &= \sqrt{\sigma^2(\mathrm{WP}_i)} \\
\sigma^2(\mathrm{WP}_1) &= 0{,}0006 &&\Rightarrow \sigma(\mathrm{WP}_1) = 0{,}0244949 \\
\sigma^2(\mathrm{WP}_2) &= 0{,}0024 &&\Rightarrow \sigma(\mathrm{WP}_2) = 0{,}0489898 \\
\sigma^2(\mathrm{WP}_3) &= 0{,}000384 &&\Rightarrow \sigma(\mathrm{WP}_3) = 0{,}0195959
\end{aligned}
$$

$$\begin{array}{ccccc} 0{,}0195959 & \leq & 0{,}0244949 & \leq & 0{,}0489898 \\ \mathrm{WP}_3 & & \mathrm{WP}_1 & & \mathrm{WP}_2 \end{array}$$

Somit ist WP_3 für Sandra Sonnenschein am besten geeignet, da es die geringste Standardabweichung und somit das geringste Risiko besitzt.

3 Übungsaufgaben

1) Hanna Hasenfuß möchte mit möglichst sicheren Wertpapierinvestitionen ihr Taschengeld aufbessern. Helfen Sie Hanna bei der Ermittlung des Wertpapiers mit der geringsten Standardabweichung.

Zustand s Eintrittswahrscheinlichkeit q_s	$s = 1$ $q_1 = 0{,}20$	$s = 2$ $q_2 = 0{,}30$	$s = 3$ $q_3 = 0{,}50$
WP_1	0,07	0,04	0,05
WP_2	0,12	0,14	0,01
WP_3	0,11	0,09	0,04

Lösung

1. Schritt: Berechnung der Erwartungswerte

$$E[\mathrm{WP}_1] = 0{,}07 \cdot 0{,}20 + 0{,}04 \cdot 0{,}30 + 0{,}05 \cdot 0{,}50 = 0{,}051$$
$$E[\mathrm{WP}_2] = 0{,}12 \cdot 0{,}20 + 0{,}14 \cdot 0{,}30 + 0{,}01 \cdot 0{,}50 = 0{,}071$$
$$E[\mathrm{WP}_3] = 0{,}11 \cdot 0{,}20 + 0{,}09 \cdot 0{,}30 + 0{,}04 \cdot 0{,}50 = 0{,}069$$

2. Schritt: Berechnung der Varianz

$$\sigma^2(\mathrm{WP}_1) = \big(0{,}07 - 0{,}051\big)^2 \cdot 0{,}20 + (0{,}04 - 0{,}051)^2 \cdot 0{,}30 + (0{,}05 - 0{,}051)^2 \cdot 0{,}50 = 0{,}000109$$
$$\sigma^2(\mathrm{WP}_2) = \big(0{,}12 - 0{,}071\big)^2 \cdot 0{,}20 + (0{,}14 - 0{,}071)^2 \cdot 0{,}30 + (0{,}01 - 0{,}071)^2 \cdot 0{,}50 = 0{,}003769$$
$$\sigma^2(\mathrm{WP}_3) = \big(0{,}11 - 0{,}069\big)^2 \cdot 0{,}20 + (0{,}09 - 0{,}069)^2 \cdot 0{,}30 + (0{,}04 - 0{,}069)^2 \cdot 0{,}50 = 0{,}000889$$

3. Schritt: Berechnung der Standardabweichung

$$\sigma^2(\mathrm{WP}_1) = 0{,}000109 \Rightarrow \sigma(\mathrm{WP}_1) = 0{,}0104403$$
$$\sigma^2(\mathrm{WP}_2) = 0{,}003769 \Rightarrow \sigma(\mathrm{WP}_2) = 0{,}0613922$$
$$\sigma^2(\mathrm{WP}_3) = 0{,}00089 \quad \Rightarrow \sigma(\mathrm{WP}_3) = 0{,}0298161$$

$$\begin{array}{ccccc} 0{,}0104403 & \leq & 0{,}0298161 & \leq & 0{,}0613922 \\ \mathrm{WP}_1 & & \mathrm{WP}_3 & & \mathrm{WP}_2 \end{array}$$

WP_1 ist für Hanna aufgrund der kleinsten Standardabweichung am besten geeignet.

2) Albert hat für risikobehaftete Wertpapiere genauso viel übrig wie für seine Schwiegermutter. Deshalb bittet er Sie, für ihn das risikoärmste Wertpapier zu ermitteln.

Zustand s Eintrittswahrscheinlichkeit q_s	$s = 1$ $q_{s_1} = 0{,}20$	$s = 2$ $q_{s_2} = 0{,}35$	$s = 3$ $q_{s_3} = 0{,}45$
WP_1	0,07	0,08	0,05
WP_2	0,15	0,18	0,04
WP_3	0,14	0,09	0,08

Lösung

1. Schritt: Berechnung der Erwartungswerte

$$E[\mathrm{WP}_1] = 0{,}07 \cdot 0{,}20 + 0{,}08 \cdot 0{,}35 + 0{,}05 \cdot 0{,}45 = 0{,}0645$$
$$E[\mathrm{WP}_2] = 0{,}15 \cdot 0{,}20 + 0{,}18 \cdot 0{,}35 + 0{,}04 \cdot 0{,}45 = 0{,}1110$$
$$E[\mathrm{WP}_3] = 0{,}14 \cdot 0{,}20 + 0{,}09 \cdot 0{,}35 + 0{,}08 \cdot 0{,}45 = 0{,}0955$$

2. Schritt: Berechnung der Varianz

$$\sigma^2(E[\mathrm{WP}_1]) = \big(0{,}07 - 0{,}0645)^2 \cdot 0{,}20 + (0{,}08 - 0{,}0645)^2 \cdot 0{,}35 + (0{,}05 - 0{,}0645)^2 \cdot 0{,}45 = 0{,}00018475$$
$$\sigma^2(E[\mathrm{WP}_2]) = \big(0{,}15 - 0{,}1110)^2 \cdot 0{,}20 + (0{,}18 - 0{,}1110)^2 \cdot 0{,}35 + (0{,}04 - 0{,}1110)^2 \cdot 0{,}45 = 0{,}004239$$
$$\sigma^2(E[\mathrm{WP}_3]) = \big(0{,}14 - 0{,}0985)^2 \cdot 0{,}20 + (0{,}09 - 0{,}0985)^2 \cdot 0{,}35 + (0{,}08 - 0{,}0985)^2 \cdot 0{,}45 = 0{,}00051475$$

3. Schritt: Berechnung der Standardabweichung

$$\sigma^2(E[\mathrm{WP}_1]) = 0{,}00018475 \Rightarrow \sigma(E[\mathrm{WP}_1]) = 0{,}01359228$$
$$\sigma^2(E[\mathrm{WP}_2]) = 0{,}00423900 \Rightarrow \sigma(E[\mathrm{WP}_2]) = 0{,}06510760$$
$$\sigma^2(E[\mathrm{WP}_3]) = 0{,}00051475 \Rightarrow \sigma(E[\mathrm{WP}_3]) = 0{,}02268810$$

$$\begin{array}{ccccc} 0{,}01359228 & \leq & 0{,}0022886 & \leq & 0{,}06510760 \\ \mathrm{WP}_1 & & \mathrm{WP}_3 & & \mathrm{WP}_2 \end{array}$$

WP_1 ist für Albert aufgrund der kleinsten Standardabweichung am besten geeignet.