Substitutionsverfahren vs. Lagrange-Methode

1 Motivation

Substitutionsverfahren und Lagrange-Methode sind Verfahren, die es ermöglichen, Optimierungen unter Nebenbedingungen durchzuführen. Die folgende Ausführung soll beide Varianten anhand derselben Aufgabenstellung verdeutlichen.

2 Aufgabenstellung

Saskia Scheu möchte ein Portfolio aus den Wertpapieren WP_1 und WP_2 erstellen und dabei so wenig Risiko eingehen wie möglich. Die Renditen der Wertpapiere in den möglichen Zuständen s und deren Eintrittswahrscheinlichkeiten q_s werden durch die Tabelle dargestellt.

	$s = 1$	$s = 2$	$s = 3$	$s = 4$
	$q_1 = 0{,}1$	$q_2 = 0{,}5$	$q_3 = 0{,}2$	$q_4 = 0{,}2$
WP_1	0,01	0,05	0,12	0,20
WP_2	0,20	0,14	0,08	0,02

Außerdem sind folgende Werte bekannt:

Varianz WP_1:	$\sigma_1^2 = 0{,}00404$
Varianz WP_2:	$\sigma_2^2 = 0{,}00306$
Kovarianz WP_1 und WP_2:	$Cov_{12} = -0{,}00348$
Korrelationskoeffizient WP_1 und WP_2:	$\rho_{12} = -0{,}994532$

(Sollten Sie Hilfe bei der Berechnung von Varianz, Kovarianz und Korrelationskoeffizient benötigen, finden Sie die entsprechenden Artikel im Mathematischen Kompendium.)

Helfen Sie Saskia, indem Sie die jeweiligen Anteile der Wertpapiere (w_1, w_2) des Minimum-Varianz-Portfolio (MVP) ermitteln. Es geht also darum, das Risiko des Portfolios unter der *Nebenbedingung*, dass das Portfolio aus WP_1 und WP_2 besteht, zu *minimieren*. Die Formel für das MVP lautet:

$$\sigma_M^2 = w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2\sigma_1\sigma_2\rho_{12}$$

3 Substitutionsverfahren

Das Substitutionsverfahren ist nahezu selbsterklärend. Es werden Bestandteile der zu optimierenden Gleichung, zu denen Nebenbedingungen existieren, durch die Nebenbedingungen substituiert, also ersetzt.

Ein einfaches Beispiel: $y = x + b$ und die Nebenbedingung ist: $b = 2x$. Dann ergibt sich für die Ausgangsgleichung: $y = 3x$, was dann differenziert wird.

Aber: Umso komplexer und vielseitiger die Variablen werden, umso größer wird der Term!

Schritt 1: Formel des MVP:

$$\sigma_M^2 = w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2\sigma_1\sigma_2\rho_{12}$$

Schritt 2: Die Nebenbedingung lautet:

$w_1 + w_2 = 1$, da das Portfolio aus WP_1 und WP_2 besteht und daher die Summe der Anteile 1 sein muss.

Schritt 3: Umstellen der Nebenbedingung nach w_2:

$$w_2 = 1 - w_1$$

Schritt 4: Einsetzen in Formel des MVP:

$$\sigma_M^2 = w_1^2\sigma_1^2 + (1 - w_1)^2\sigma_2^2 + 2w_1(1 - w_1)\sigma_1\sigma_2\rho_{12}$$

Schritt 5: Ausmultiplizieren der Klammern:

$$\sigma_M^2 = w_1^2\sigma_1^2 + (1 - 2w_1 + w_1^2)\sigma_2^2 + (2w_1 - 2w_1^2)(\sigma_1\sigma_2\rho_{12})$$

$$\sigma_M^2 = w_1^2\sigma_1^2 + (1 - 2w_1 + w_1^2)\sigma_2^2 + 2w_1\sigma_1\sigma_2\rho_{12} - 2w_1^2\sigma_1\sigma_2\rho_{12}$$

$$\sigma_M^2 = w_1^2\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2w_1\sigma_2^2 + w_1^2\sigma_2^2 + 2w_1\sigma_1\sigma_2\rho_{12} - 2w_1^2\sigma_1\sigma_2\rho_{12}$$

Schritt 6: Ableiten nach w_1 und gleich null setzen (notwendige Bedingung, da wir das Minimum suchen):

$$\frac{\delta\sigma_M^2}{\delta w_1} = 2w_1\sigma_1^2 - 2\sigma_2^2 + 2w_1\sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho_{12} - 4w_1\sigma_1\sigma_2\rho_{12} = 0$$

Schritt 7: $2w_1$ ausklammern:

$$2w_1(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2\rho_{12}) + 2\sigma_1\sigma_2\rho_{12} - 2\sigma_2^2 = 0$$

Schritt 8: $2\sigma_1\sigma_2\rho_{12} - 2\sigma_2^2$ auf die andere Seite des Gleichheitszeichens bringen:

$$2w_1(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2\rho_{12}) = -2\sigma_1\sigma_2\rho_{12} + 2\sigma_2^2$$

Schritt 9: Alles durch 2 dividieren:

$$w_1(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2\rho_{12}) = -\sigma_1\sigma_2\rho_{12} + \sigma_2^2$$

Schritt 10: Durch $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2\rho_{12}$ teilen:

$$w_1 = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2\rho_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2\rho_{12}}$$

Schritt 11: Die folgende Formel wird benötigt:

$$\rho_{ij} = \frac{Cov_{ij}}{\sigma_i\sigma_j} \Leftrightarrow Cov_{ij} = \sigma_i\sigma_j\rho_{ij}$$

Schritt 12: Setzt man die Formel ein, ergibt sich der Term:

$$w_1 = \frac{\sigma_2^2 - Cov_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2Cov_{12}}$$

Schritt 13: Einsetzen der Werte für σ_1^2, σ_2^2 und Cov_{12}:

$$w_1 = \frac{0{,}00306 - (-0{,}00348)}{0{,}00404 + 0{,}00306 - 2(-0{,}00348)} \Rightarrow w_1 \approx 0{,}465149$$

Schritt 14: w_2 berechnen:

$$w_2 = 1 - 0{,}46149 \Leftrightarrow w_2 = 0{,}534851$$

(Auf den Nachweis, dass die hinreichende Bedingung für ein Minimum erfüllt ist, wird hier verzichtet.)

4 Lagrange-Methode

Bei der Lagrange-Methode wird ein Multiplikator λ eingeführt. Die Gleichung der Nebenbedingung wird nach 0 umgestellt und mit λ multipliziert. Dieser Term wird dann mit der zu optimierenden Funktion (Zielfunktion) addiert. Die Lagrange-Funktion ergibt sich also wie folgt:

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda \cdot (NB).$$

Die Lagrange-Funktion wird nun nach allen unabhängigen Variablen und λ abgeleitet. So entsteht ein Gleichungssystem, welches entsprechend gelöst werden kann.

Die Lagrange-Methode sollte dem Substitutionsverfahren vorgezogen werden, wenn mehr als drei Variablen zu differenzieren sind.

Schritt 1: Formel des MVP:

$$\sigma_M^2 = w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2\sigma_1\sigma_2\rho_{12}$$

Schritt 2: Die Nebenbedingung (NB) lautet:

$w_1 + w_2 = 1$, da das Portfolio aus WP_1 und WP_2 besteht und daher die Summe der Anteile 1 sein muss.

Schritt 3: Umstellen, sodass die Nebenbedingung 0 ergibt:

$$0 = 1 - w_1 - w_2$$

Schritt 4: Aufstellen der Lagrange-Funktion:

$$L = w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2\sigma_1\sigma_2\rho_{12} + \lambda(1 - w_1 - w_2)$$

Schritt 5: Ableitung nach w_1, w_2 und λ:

I

$$\frac{\delta L}{\delta w_1} = 2w_1\sigma_1^2 + 2w_2\sigma_1\sigma_2\rho_{12} - \lambda = 0$$

II

$$\frac{\delta L}{\delta w_2} = 2w_2\sigma_2^2 + 2w_1\sigma_1\sigma_2\rho_{12} - \lambda = 0$$

III

$$\frac{\delta L}{\delta \lambda} = 1 - w_1 - w_2 = 0$$

Schritt 6: I und II nach λ umstellen:

I

$$2w_1\sigma_1^2 + 2w_2\sigma_1\sigma_2\rho_{12} = \lambda$$

II

$$2w_2\sigma_2^2 + 2w_1\sigma_1\sigma_2\rho_{12} = \lambda$$

Schritt 7: Gleichsetzen von I und II:

$$2w_1\sigma_1^2 + 2w_2\sigma_1\sigma_2\rho_{12} = 2w_2\sigma_2^2 + 2w_1\sigma_1\sigma_2\rho_{12}$$

Schritt 8: Alles durch 2 teilen:

$$w_1\sigma_1^2 + w_2\sigma_1\sigma_2\rho_{12} = w_2\sigma_2^2 + w_1\sigma_1\sigma_2\rho_{12}$$

Schritt 9: Alle Terme mit w_1 auf die linke Seite, alle Terme mit w_2 auf die rechte Seite bringen:

$$w_1\sigma_1^2 - w_1\sigma_1\sigma_2\rho_{12} = w_2\sigma_2^2 - w_2\sigma_1\sigma_2\rho_{12}$$

Schritt 10: Ausklammern von w_1 und w_2:

$$w_1(\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2\rho_{12}) = w_2(\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2\rho_{12})$$

Schritt 11: Durch $\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2\rho_{12}$ teilen:

$$w_1 = w_2\frac{\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2\rho_{12}}{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2\rho_{12}}$$

Schritt 12: Einsetzen der Werte wie oben:

$$w_1 = 0{,}869681w_2$$

Schritt 13: Einsetzen in die Nebenbedingung:

$$1 = 0{,}869681w_2 + w_2$$

$$1 = 1{,}869681w_2 \longrightarrow w_2 \approx 0{,}534850$$

Schritt 14: w_1 berechnen:

$$w_1 = 1 - 0{,}534850 \longrightarrow w_1 \approx 0{,}465150$$

5 Ergebnis

Die beiden unterschiedliche Optimierungsverfahren führen zum gleichen Ergebnis. Die geringen Unterschiede in der sechsten Nachkommastelle ergeben sich durch die Rundung.
(Auch hier wird auf die Überprüfung der hinreichenden Bedingung verzichtet.)