

Kovarianz

1 Motivation

Die Kovarianz ist ein Zusammenhangsmaß für zwei Variablen, die der gleichen Wahrscheinlichkeitsverteilung unterliegen. Das Zusammenhangsmaß basiert auf der Berechnung der gemeinsamen (Ko-) Abweichung (-varianz) der Variablen vom Erwartungswert. Die Kovarianz gibt darüber Auskunft, ob bei einer hohen (niedrigen) Ausprägung der einen Variable auch eine hohe (niedrige) Ausprägung der zweiten Variable zu erwarten ist. Tritt dieser Fall ein, liegt ein positiver Zusammenhang vor. Wird bei einer hohen (niedrigen) Ausprägung der einen Variable, eine niedrige (hohe) Ausprägung der anderen Variable erwartet, liegt ein negativer Zusammenhang vor. Die Kovarianz ist damit ein Zusammenhangsmaß, das die *Richtung* eines Zusammenhangs zweier Variablen angibt.

2 Grundlagen

2.1 Die Aufgabenstellung

In einem finanzwirtschaftlichen Kontext ist die Kovarianz unter anderem notwendig, um das Risiko eines Portfolios, das sich aus einer Mischung von mindestens zwei unterschiedlichen Wertpapieren ergibt, zu ermitteln.

In dieser Aufgabe soll die Kovarianz der Wertpapiere berechnet und interpretiert werden.

2.2 Voraussetzung

Da bezüglich der Ermittlung von Wertpapierrenditen Unsicherheit in den Daten vorliegt, wird bei der Berechnung von verschiedenen zukünftigen Zuständen ausgegangen. Dabei besitzt jedes Wertpapier WP_i in jedem möglichen Zustand s_i eine individuelle zustandsabhängige Rendite r_{is} , die mit der Eintrittswahrscheinlichkeit des Zustandes q_s erzielt wird.

2.3 Die Variablen

i, j = jeweiliges Wertpapier

s = Zustand n = Anzahl der Zustände

q_s = Wahrscheinlichkeit, mit der der Zustand s eintritt

$E[r_i]$ bzw. $E[r_j]$ = Erwartungswert der Rendite des Wertpapiers i bzw. j

r_{is} bzw. r_{js} = Rendite des Wertpapiers i bzw. j im Zustand s

2.4 Die Daten

In der Tabelle stehen für zwei Wertpapiere exemplarisch die jeweiligen Renditen in Abhängigkeit von dem zukünftigen Zustand.

	$s = 1$	$s = 2$	$s = 3$	$s = 4$
	$q_1 = 0,10$	$q_2 = 0,50$	$q_3 = 0,20$	$q_4 = 0,20$
WP ₁	0,01	0,05	0,12	0,20
WP ₂	0,20	0,14	0,08	0,02

2.5 Der Erwartungswert

Zur Berechnung der Kovarianz der Wertpapiere werden die sogenannten Erwartungswerte der Wertpapiere benötigt. Der Erwartungswert $E[r_i]$ gibt den zu erwartenden Wert der Rendite des Wertpapiers i an. Dabei werden die zustandsabhängigen Renditen r_{is} mit den entsprechenden Eintrittswahrscheinlichkeiten der Zustände q_s multipliziert und über alle Zustände s aufsummiert. Formal wird der Erwartungswert wie folgt berechnet:

$$E[r_i] = \sum_{s=1}^n r_{is}q_s$$

2.6 Die Formel der Kovarianz

Bei der Berechnung der Kovarianz wird wie folgt vorgegangen:

Für beide Wertpapiere i und j wird in den einzelnen Zuständen der jeweilige Erwartungswert $E[r_i]$ bzw. $E[r_j]$ von der zustandsabhängigen Rendite r_{is} bzw. r_{js} subtrahiert. Das gibt das Ausmaß der Abweichung vom Erwartungswert jedes Wertpapiers an.

Anschließend wird aus den Abweichungen vom Erwartungswert und der Eintrittswahrscheinlichkeit des jeweiligen Zustands q_s ein Produkt gebildet.

Die Kovarianz beider Wertpapiere ergibt sich aus der Summe der Produkte über alle Zustände hinweg. Über die Richtung des Zusammenhangs gibt das Vorzeichen Auskunft. Die Formel zur Ermittlung der Kovarianz lautet:

$$Cov(r_i, r_j) = \sum_{s=1}^n (r_{is} - E[r_i])(r_{js} - E[r_j])q_s$$

2.7 Interpretation

Für die Interpretation gilt Folgendes:

Kovarianz > 0 weist auf einen positiven Zusammenhang hin,

Kovarianz $= 0$ weist darauf hin, dass kein monotoner Zusammenhang existiert,

Kovarianz < 0 weist auf einen negativen Zusammenhang hin.

3 Testaufgabe

Ermitteln Sie die Kovarianz der beiden Wertpapiere WP_1 und WP_2 .

	$s = 1$	$s = 2$	$s = 3$	$s = 4$
	$q_1 = 0,10$	$q_2 = 0,50$	$q_3 = 0,20$	$q_4 = 0,20$
WP_1	0,01	0,05	0,12	0,20
WP_2	0,20	0,14	0,08	0,02

3.1 Berechnung

3.1.1 Erwartungswerte der Wertpapiere bestimmen

$$E[r_1] = 0,01 \cdot 0,1 + 0,05 \cdot 0,5 + 0,12 \cdot 0,2 + 0,20 \cdot 0,2 = 0,09$$

$$E[r_2] = 0,20 \cdot 0,1 + 0,14 \cdot 0,5 + 0,08 \cdot 0,2 + 0,02 \cdot 0,2 = 0,11$$

3.1.2 Korrektes Einsetzen in die Kovarianzformel

$$Cov(r_1, r_2) = \sum_{s=1}^n (r_{1s} - E[r_1])(r_{2s} - E[r_2])q_s$$

Setzt man etappenweise ein, können die eingesetzten Werte leichter nachvollzogen werden:

$$\text{Für Zustand } s = 1: (0,01 - 0,09)(0,20 - 0,11)0,1 = -0,00072$$

$$\text{Für Zustand } s = 2: (0,05 - 0,09)(0,14 - 0,11)0,5 = -0,0006$$

$$\text{Für Zustand } s = 3: (0,12 - 0,09)(0,08 - 0,11)0,2 = -0,00018$$

$$\text{Für Zustand } s = 4: (0,20 - 0,09)(0,02 - 0,11)0,2 = -0,00198$$

Summiert man nun die Einzelwerte, erhält man eine Kovarianz von: $-0,00348$

3.2 Interpretation des Wertes

Der Wert der Kovarianz zwischen WP_1 und WP_2 weist mit $-0,00348$ auf einen negativen Zusammenhang hin. Ist zum Beispiel im Zustand $s = 4$ die Rendite von WP_1 relativ hoch, so ist die Rendite von WP_2 im Zustand $s = 4$ relativ niedrig.

4 Übungsaufgabe

4.1 Aufgabenstellung

Ermitteln Sie die Kovarianz der beiden Wertpapiere WP_1 und WP_2 und interpretieren Sie diese.

	$s = 1$	$s = 2$	$s = 3$
	$q_1 = 0,40$	$q_2 = 0,50$	$q_3 = 0,10$
WP_1	0,06	0,10	0,16
WP_2	0,30	0,04	0,10

4.2 Ergebnisse

$E[r_1] = 0,09$, $E[r_2] = 0,15$, $Cov(r_1, r_2) = -0,0027$, negativer Zusammenhang