

# Erwartungswert

## 1 Motivation

Der Erwartungswert einer Zufallsvariablen ermittelt die Zahl, welche die Zufallsvariable im Mittel annimmt. Nützlich ist dieser Umstand, um optimale ökonomische Entscheidungen zu treffen, da der Erwartungswert als wichtiger Indikator in die Entscheidungsfindung mit einbezogen werden kann. Die Relevanz dieses Wertes soll im folgenden Artikel verdeutlicht werden.

## 2 Der Erwartungswert

Rebecca Reumütig hat den Schmuck, den sie von ihrem Freund geschenkt bekommen hat, heimlich verkauft, um sich Schuhe zu kaufen. Nach einigen Tagen plagt sie das schlechte Gewissen, sodass sie sich entscheidet, den Erlös doch in Wertpapiere zu investieren, damit sie ihrem Freund ein Ticket für das Fußball-WM-Finale schenken kann.

Rebecca bittet Sie, ihr bei der Auswahl des Wertpapiers zu helfen, welches im Mittel die höchste Rendite verspricht. Berechnen Sie den Erwartungswert der folgenden drei Wertpapiere!

Die Preise der Wertpapiere und die zustandsabhängigen Renditen können der nachfolgenden Tabelle entnommen werden.

Zustand $s$ Eintrittswahrscheinlichkeit $q$	Preis in Euro	$s = 1$ $q_1 = 0,40$	$s = 2$ $q_2 = 0,25$	$s = 3$ $q_3 = 0,35$
WP <sub>1</sub>	100	0,05	0,07	0,09
WP <sub>2</sub>	100	0,03	0,11	0,07
WP <sub>3</sub>	100	0,01	0,09	0,08

Vereinfacht lautet die Formel des Erwartungswertes folgendermaßen:

$$EW = x_1 \cdot q_1 + x_2 \cdot q_2 + \dots + x_n \cdot q_n$$

Um den Erwartungswert für Wertpapiere zu berechnen, gehen wir wie folgt vor:

$x_1$  entspricht der Ausprägung des Wertes von WP<sub>1</sub> im Zustand  $s_1$ , also 0,05.

$q_1$  gibt die Eintrittswahrscheinlichkeit des Zustands  $s_1$  an, also 0,40(40%).

Anschließend multiplizieren wir  $x_1$  und  $q_1$  und addieren dieses Produkt mit den jeweiligen Produkten von  $x_2$ ,  $q_2$  und  $x_3$ ,  $q_3$ .

$$EW(\text{WP}_1) = 0,05 \cdot 0,40 + 0,07 \cdot 0,25 + 0,09 \cdot 0,35 = 0,069$$

**Interpretation:** Wertpapier 1 erbringt im Mittel eine Rendite von 6,90%. Um Rebecca bei ihrer Entscheidung zu helfen, müssen wir nun noch den Erwartungswert der beiden anderen Wertpapiere

ermitteln und miteinander vergleichen.

$$EW(WP_2) = 0,03 \cdot 0,40 + 0,11 \cdot 0,25 + 0,07 \cdot 0,35 = 0,064$$

$$EW(WP_3) = 0,01 \cdot 0,40 + 0,09 \cdot 0,25 + 0,08 \cdot 0,35 = 0,0545$$

Daraus folgt:

$$\begin{array}{ccc} 0,069 & \geq & 0,064 & \geq & 0,0545 \\ (WP_1) & & (WP_2) & & (WP_3) \end{array}$$

Rebecca sollte Wertpapier 1 wählen, da dieses die höchste erwartete Rendite aufweist.

### 3 Übungsaufgaben

1) Emir Edelherz möchte all seine weltlichen Fesseln ablegen und ein neues Leben als Mönch in der Mongolei beginnen. Er hat vor, seinen ganzen Besitz in Wertpapiere zu investieren, um damit krebskranke Kinder zu unterstützen. Emir Edelherz bittet Sie, ihm bei der Investitionsentscheidung zur Seite zu stehen. Welches der drei Wertpapiere verspricht im Mittel die höchste erwartete Rendite?

Zustand $s$	$s = 1$	$s = 2$	$s = 3$
Eintrittswahrscheinlichkeit $q$	$q_1 = 0,20$	$q_2 = 0,65$	$q_3 = 0,15$
WP <sub>1</sub>	0,03	0,08	0,07
WP <sub>2</sub>	0,10	0,05	0,12
WP <sub>3</sub>	0,04	0,10	0,08

#### Lösung

$$EW = x_1 \cdot q_1 + x_2 \cdot q_2 + \dots + x_n \cdot q_n$$

$$EW(WP_1) = 0,03 \cdot 0,20 + 0,08 \cdot 0,65 + 0,07 \cdot 0,15 = 0,0685$$

$$EW(WP_2) = 0,10 \cdot 0,20 + 0,05 \cdot 0,65 + 0,12 \cdot 0,15 = 0,0705$$

$$EW(WP_3) = 0,04 \cdot 0,20 + 0,10 \cdot 0,65 + 0,08 \cdot 0,15 = 0,0850$$

$$\begin{array}{ccc} 0,0850 & \geq & 0,0705 & \geq & 0,0685 \\ (WP_3) & & (WP_2) & & (WP_1) \end{array}$$

Emir Edelherz sollte in WP<sub>3</sub> investieren.

2) Siegmund Spaffuchs ist ein Erbsenzähler, wie er im Bilderbuch steht. Er hat stets das Bestreben, sein gesamtes Vermögen optimal anzulegen. Sonst bekommt er Alpträume. Ermitteln Sie für Siegmund den Erwartungswert der Rendite der folgenden vier Wertpapiere.

Zustand $s$	$s = 1$	$s = 2$	$s = 3$	$s = 4$
Eintrittswahrscheinlichkeit $q$	$q_1 = 0,20$	$q_2 = 0,25$	$q_3 = 0,40$	$q_4 = 0,15$
WP <sub>1</sub>	0,07	0,12	0,07	0,09
WP <sub>2</sub>	0,01	0,03	0,10	0,12
WP <sub>3</sub>	0,13	0,08	0,05	0,07
WP <sub>4</sub>	0,14	0,11	0,01	0,25

### Lösung

$$EW = x_1 \cdot q_1 + x_2 \cdot q_2 + \dots + x_n \cdot q_n$$

$$EW(\text{WP}_1) = 0,07 \cdot 0,20 + 0,12 \cdot 0,25 + 0,07 \cdot 0,40 + 0,09 \cdot 0,15 = 0,0855$$

$$EW(\text{WP}_2) = 0,01 \cdot 0,20 + 0,03 \cdot 0,25 + 0,10 \cdot 0,40 + 0,12 \cdot 0,15 = 0,0675$$

$$EW(\text{WP}_3) = 0,13 \cdot 0,20 + 0,08 \cdot 0,25 + 0,05 \cdot 0,40 + 0,07 \cdot 0,15 = 0,0765$$

$$EW(\text{WP}_4) = 0,14 \cdot 0,20 + 0,11 \cdot 0,25 + 0,01 \cdot 0,40 + 0,25 \cdot 0,15 = 0,0970$$

$$0,0970 \geq 0,0855 \geq 0,0765 \geq 0,0675$$

(WP<sub>4</sub>)            (WP<sub>1</sub>)            (WP<sub>3</sub>)            (WP<sub>2</sub>)

Siegmund sollte sich also für Wertpapier 4 entscheiden.