Determinantenberechnung

1 Motivation

Determinanten geben uns Aufschluss darüber, ob ein lineares Gleichungssystem eindeutig lösbar ist. Ein Gleichungssystem ist genau dann eindeutig lösbar, wenn die Determinante ungleich null ist.

2 Determinantenberechnung

Die Relevanz der Determinantenberechnung soll anhand folgender Aufgabe unterstrichen werden.

Rudi Hardrock möchte wieder Urlaub auf Mallorca machen. Um sich diesen Traum zu erfüllen, muss er einmal mehr sein Geschick als Arbitrageur unter Beweis stellen.
Er bittet Sie zu überprüfen, ob es sich im Folgenden um einen vollständigen oder unvollständigen Kapitalmarkt handelt.

	Zahlung in Euro im Zustand			
Wertpapier	s_1	s_2	s_3	Preis in Euro
A	70	60	20	25
B	30	20	40	60
C	50	30	38	20

Lösungsansatz: Rudi Hardrock sind noch 2 wichtige Voraussetzungen für einen vollständigen Kapitalmarkt in Erinnerung geblieben.

1. Voraussetzung: Anzahl der Wertpapiere = Anzahl der Zustände
2. Voraussetzung: lineare Unabhängigkeit der Wertpapiere (ist gegeben, wenn die Determinante ungleich null ist)

Überprüfung, ob die Voraussetzungen für einen vollkommenen Kapitalmarkt erfüllt sind:

1. Voraussetzung:
    - Anzahl der Wertpapiere (A, B, C) = 3
    - Anzahl der Zustände (s_1, s_2, s_3) = 3

   Daraus folgt, dass die erste Voraussetzung erfüllt ist.

2. Voraussetzung: lineare Unabhängigkeit der Wertpapiere

   Schritt 1: Identifikation der Matrix
   Es handelt sich um eine 3x3-Matrix, da drei Wertpapiere (diese ergeben die Zeilen) und drei Zustände (diese ergeben die Spalten) vorliegen:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 & 60 & 20 \\ 30 & 20 & 60 \\ 50 & 30 & 38 \end{pmatrix}$$

   Schritt 2: Berechnung der Determinante
   Da es sich um eine 3x3-Matrix handelt, können wir von der Regel von Sarrus Gebrauch machen. Sie funktioniert folgendermaßen:

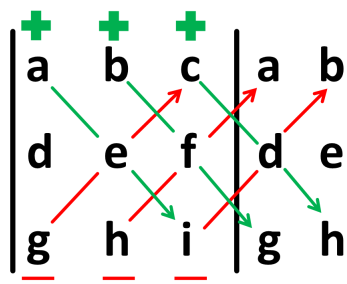
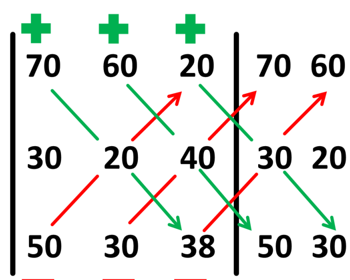


Abbildung 1: Regel von Sarrus

$$|A| = a \cdot e \cdot i + b \cdot f \cdot g + c \cdot d \cdot h - g \cdot e \cdot c - h \cdot f \cdot a - i \cdot d \cdot b$$

   Auf unsere Aufgabe bezogen sieht das wie folgt aus:



$$\begin{aligned} |A| &= 70 \cdot 20 \cdot 38 + 60 \cdot 40 \cdot 50 + 20 \cdot 30 \cdot 30 - 50 \cdot 20 \cdot 20 - 30 \cdot 40 \cdot 70 - 38 \cdot 30 \cdot 60 \\ &= 18800 \neq 0 \end{aligned}$$

   Interpretation: Da die Determinante ungleich null ist, liegt eine lineare Unabhängigkeit der Wertpapiere vor.

Da beide Voraussetzungen erfüllt sind, handelt es sich um einen vollständigen Kapitalmarkt.

3 Übungsaufgaben

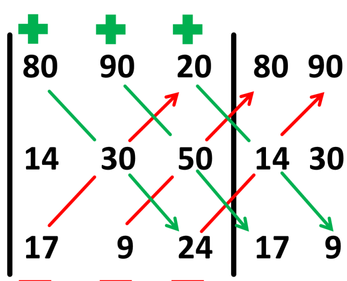
Überprüfen Sie, ob ein Kapitalmarkt mit den folgenden Wertpapieren vollständig ist.

Wertpapier	Zahlung in Euro im Zustand			Preis in Euro
	s_1	s_2	s_3	
A	80	90	20	30
B	14	30	50	40
C	17	9	24	15

Lösung

1. Voraussetzung:
   - Anzahl der Wertpapiere (A, B, C) = 3
   - Anzahl der Zustände (s_1, s_2, s_3) = 3

2. Voraussetzung: lineare Unabhängigkeit der Wertpapiere
   Schritt 1: Identifikation der Matrix
   Es handelt es sich um eine 3x3-Matrix, da drei Wertpapiere und drei Zustände vorliegen.
   Schritt 2: Berechnung der Determinanten
   Die Berechnung kann mittels der Regel von Sarrus erfolgen, da es sich um eine 3x3-Matrix handelt.



$$
\begin{aligned}
|A| &= 80 \cdot 30 \cdot 24 + 90 \cdot 50 \cdot 17 + 20 \cdot 14 \cdot 9 - 17 \cdot 30 \cdot 20 - 9 \cdot 50 \cdot 80 - 24 \cdot 14 \cdot 90 \\
&= 60180 \neq 0
\end{aligned}
$$

Interpretation: Der Kapitalmarkt ist vollständig.