

Beispiele für kleine Gleichungssysteme

Die Kosten für einen Möbeltransporter setzen sich aus der Tagesgebühr und den Kosten für die gefahrenen Kilometer zusammen. Für einen Tag und eine Gesamtstrecke von 100 km zahlt man 37,50 €. Ebenfalls ein Tag mit nur 40 gefahrenen Kilometern kostet 30,00 €. Wie hoch ist die Tagesgebühr? Wie viel kostet ein gefahrener Kilometer?

Wir bezeichnen die Tagesgebühr mit x und die Kosten pro Kilometer mit y .

Gegeben:

$$\text{I} \quad x + 100y = 37,50$$

$$\text{II} \quad x + 40y = 30,00$$

Gesucht: Lösung für x und y

1 Grafische Lösung

1. Umstellen der Gleichungen nach y :

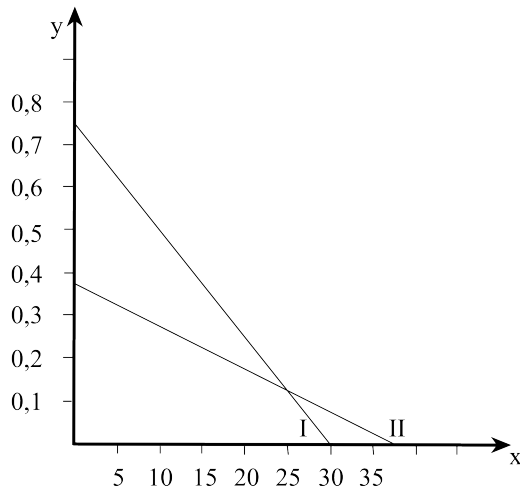
$$\text{I} \quad y = \frac{37,5 - x}{100}$$

$$\text{II} \quad y = \frac{30 - x}{40}$$

2. Anfertigen einer Wertetabelle:

	x	0	5	10	20
I	y	0,375	0,325	0,275	0,175
II	y	0,75	0,625	0,5	0,25

3. Einzeichnen der Wertepaare in ein Koordinatensystem:



4. Koordinaten des Schnittpunkts ablesen:

$$x = 25$$

$$y = 0,125$$

Die Tagesgebühr beträgt 25 € und jeder gefahrene Kilometer kostet 0,125 €.

2 Einsetzungsverfahren

2.1 Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und 2 Variablen

1. Umstellen einer Gleichung nach einer Variablen:

$$\text{I} \quad y = \frac{37,5 - x}{100}$$

2. Einsetzen in die andere Gleichung:

$$\text{II} \quad x + 40y = 30 \quad \rightarrow \quad x + 40 \cdot \frac{(37,5 - x)}{100} = 30$$

3. Auflösen der Gleichung nach der Variablen:

$$x + 40 \cdot \frac{(37,5 - x)}{100} = 30$$

$$x + 15 - 0,4x = 30$$

$$0,6x + 15 = 30$$

$$0,6x = 15$$

$$x = 25$$

4. Berechnen der anderen Variablen mithilfe der ersten Gleichung:

$$y = \frac{37,5 - x}{100} = \frac{37,5 - 25}{100} = 0,125$$

Die Tagesgebühr beträgt 25 € und jeder gefahrene Kilometer kostet 0,125 €.

2.2 Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 3 Variablen

Beim Einsetzungsverfahren mit mehr als zwei Variablen ist zu beachten, dass man systematisch nach mehreren Variablen umstellen muss.

Gegeben:

$$\text{I} \quad x + 2y + 3z = 6$$

$$\text{II} \quad 4x + 5y + 6z = 2$$

$$\text{III} \quad 7x + 8y + 8z = 3$$

Gesucht: Lösung für x , y und z

1. Umstellen einer Gleichung nach einer Variablen:

$$\text{I} \quad x = 6 - 2y - 3z$$

2. Einsetzen in die beiden anderen Gleichungen:

$$\text{II} \quad 4x + 5y + 6z = 2 \quad \rightarrow \quad 4 \cdot (6 - 2y - 3z) + 5y + 6z = 2 \quad \rightarrow \quad -3y - 6z = -22$$

$$\text{III} \quad 7x + 8y + 8z = 3 \quad \rightarrow \quad 7 \cdot (6 - 2y - 3z) + 8y + 8z = 3 \quad \rightarrow \quad -6y - 13z = -39$$

Ab hier ist das Vorgehen wie bei einem Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und 2 Variablen.

3. Umstellen einer der beiden Gleichung nach einer Variablen:

$$\text{II} \quad y = \frac{-22 + 6z}{-3}$$

4. Einsetzen in die letzte Gleichung:

$$\text{II} \quad -6y - 13z = -39 \quad \rightarrow \quad -6y - 13 \cdot \frac{-22 + 6z}{-3} = -39$$

5. Auflösen der Gleichung nach der Variablen:

$$-6y - 13 \cdot \frac{-22 + 6z}{-3} = -39$$

$$-44 + 12z - 13z = -39$$

$$-44 - z = -39$$

$$-z = 5$$

$$z = -5$$

6. Berechnen der nächsten Variablen mithilfe der Gleichung aus Schritt 3:

$$y = \frac{-22 + 6z}{-3} = \frac{-22 + 6 \cdot (-5)}{-3} = \frac{52}{3}$$

7. Berechnen der letzten Variablen mithilfe der Gleichung aus Schritt 1:

$$x = 6 - 2y - 3z = 6 - 2 \cdot \frac{52}{3} - 3 \cdot (-5) = -\frac{41}{3}$$

3 Gleichsetzungsverfahren

3.1 Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und 2 Variablen

1. Umstellen der Gleichungen nach einer Variablen:

$$\text{I} \quad y = \frac{37,5 - x}{100}$$

$$\text{II} \quad y = \frac{30 - x}{40}$$

2. Gleichsetzen der Terme der rechten Seite und Auflösen der Gleichung:

$$\begin{aligned} \frac{37,5 - x}{100} &= \frac{30 - x}{40} \\ 0,375 - 0,01x &= 0,75 - 0,025x \\ 0,015x &= 0,375 \\ x &= 25 \end{aligned}$$

3. Berechnen der anderen Variablen mithilfe von I oder II:

$$\text{I} \quad y = \frac{37,5 - x}{100} = \frac{37,5 - 25}{100} = 0,125$$

$$\text{II} \quad y = \frac{30 - x}{40} = \frac{30 - 25}{40} = 0,125$$

Die Tagesgebühr beträgt 25 € und jeder gefahrene Kilometer kostet 0,125 €.

3.2 Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 3 Variablen

Beim Gleichsetzungsverfahren mit mehreren Gleichungen wird durch einen Teil des Einsetzungsverfahrens das Gleichungssystem auf eine Form mit 2 Gleichungen und 2 Variablen gebracht.

Gegeben:

$$\text{I} \quad x + 2y + 3z = 6$$

$$\text{II} \quad 4x + 5y + 6z = 2$$

$$\text{III} \quad 7x + 8y + 8z = 3$$

Gesucht: Lösung für x , y und z

1. Umstellen einer Gleichung nach einer Variablen:

$$\text{I} \quad x = 6 - 2y - 3z$$

2. Einsetzen in die beiden anderen Gleichungen:

$$\text{II} \quad 4x + 5y + 6z = 2 \quad \rightarrow \quad 4 \cdot (6 - 2y - 3z) + 5y + 6z = 2 \quad \rightarrow \quad -3y - 6z = -22$$

$$\text{III} \quad 7x + 8y + 8z = 3 \quad \rightarrow \quad 7 \cdot (6 - 2y - 3z) + 8y + 8z = 3 \quad \rightarrow \quad -6y - 13z = -39$$

Ab hier ist das Vorgehen wie bei einem Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und 2 Variablen.

4 Additionsverfahren

1. Eine Gleichung so mit einer Zahl multiplizieren, dass eine Variable in beiden Gleichungen mit (bis auf das Vorzeichen) gleichem Koeffizienten vorliegt:

$$\text{I} \quad x + 100y = 37,5$$

$$\text{II} \quad x + 40y = 30$$

Das ist hier bereits gegeben.

2. Addieren der Gleichungen (oder bei gleichem Vorzeichen subtrahieren):

$$\text{I-II} \quad 60y = 7,5$$

3. Umstellen der Gleichung nach der Variablen:

$$y = 0,125$$

4. Berechnen der anderen Variablen mithilfe von **I** oder **II**:

$$\text{I} \quad x + 100y = 37,5$$

$$x + 100 \cdot 0,125 = 37,5$$

$$x + 12,5 = 37,5$$

$$x = 25$$

$$\text{II} \quad x + 40y = 30$$

$$x + 40 \cdot 0,125 = 30$$

$$x + 5 = 30$$

$$x = 25$$

Die Tagesgebühr beträgt 25€ und jeder gefahrene Kilometer kostet 0,125€.